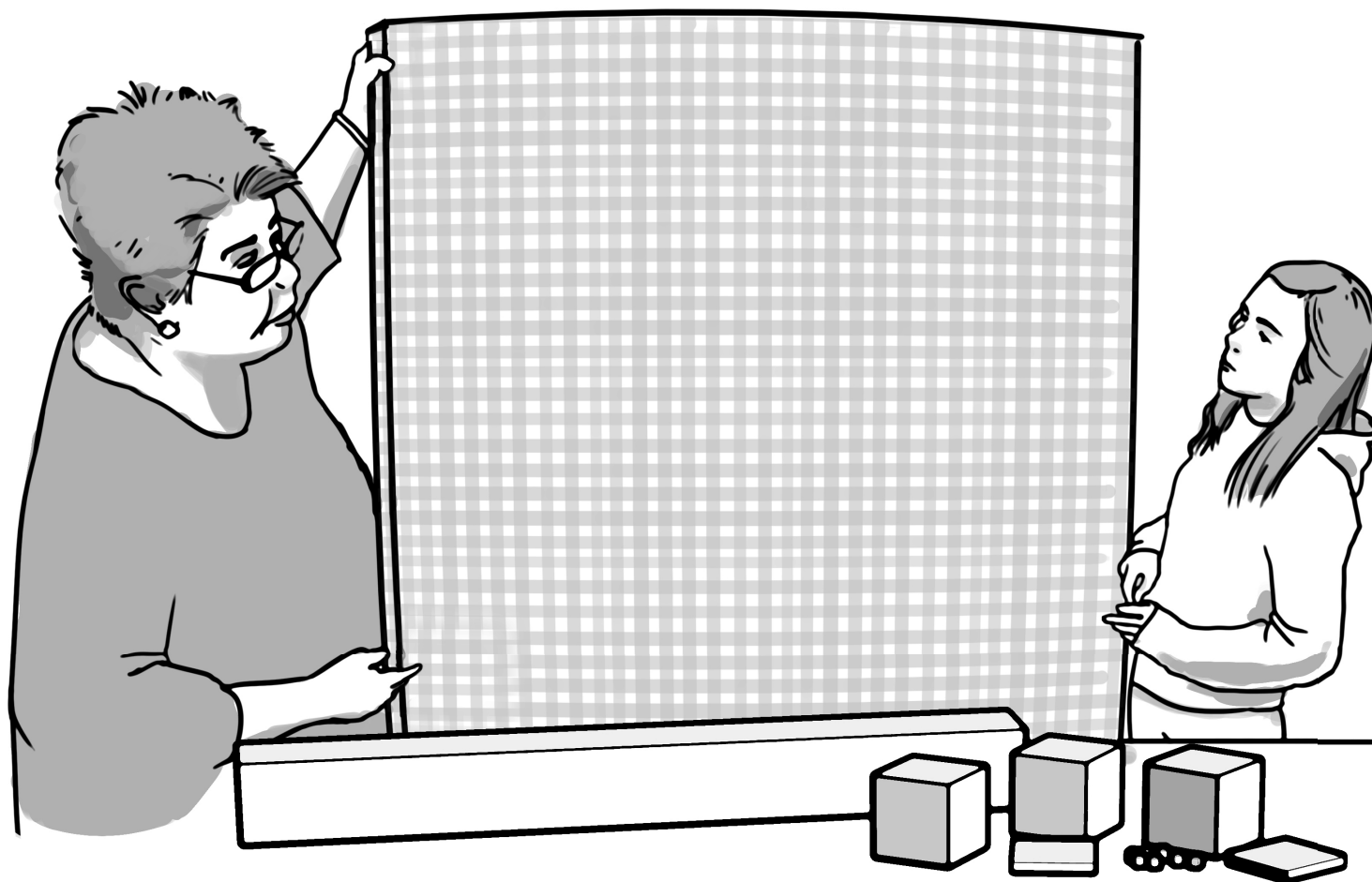




Vuorovaikutusta

17. Opetuksellinen selostus

KYMPPI-filmeistä

KYMPPI-filmeissä on aitoja oppimistilanteita luokkien 1 – 7 oppisisällöstä.

Filmien 1 – 5 selostukset eivät noudata kuultavaa puhetta, vaan ne on tiivistetty pedagogiseksi ohjeistukseksi.

Filmien 6 – 15 selostukset noudattavat keskustelua.

Opetustuokioiden välissä on lyhyitä, selventäviä tekstejä.

KYMPPI-filmit ovat netissä katsottavissa:
www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi1 ... [filmi15](http://www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi15)

Käsikirjoitus ja toteutus: Hannele Ikäheimo
Filmaus ja leikkaus: Pieta Voipio

selostus
alkaa sivulla

1.	10-pari, tupla ja melkein kuin tupla	117
2.	10 lisää ja 10 pois, 9 lisää ja 9 pois	119
3.	10:n ylitys, 10:n alitus ja analogia	121
4.	Kertolaskua	123
5.	Jakolaskua	126
6.	Lukuja 0-200 10-järjestelmävälineillä	128
7.	Lukuja 10-järjestelmävälineillä, nopat apuna	129
8.	Kaksinkertainen	130
9.	Puolet	131
10.	Ten Base -peli	133
11.	Desimaalilukuja rahoilla	134
12.	Desimaalilukuja rahoilla, nopat apuna	136
13.	10-kertainen	137
14.	Kymmenesosa	138
15.	Kertolaskua 10-järjestelmävälineillä	140

Jokaisen filmin otsikossa on QR-koodi, jonka avulla pääset älypuhelimella tai tablet-laitteella suoraan filmiin. QR-koodin käyttäminen edellyttää, että laitteeseen on asennettu lukuohjelma.

Miten tämä toteutetaan luokassa?

Katsottuamme KYMPPI-filmin, jossa oppilas työskenteli välineillä kanssani, esitettiin seuraava kysymys: "Entä miten tämä toteutetaan isossa luokassa?"

Tässä muutamia ajatuksia kehiteltäväksi edelleen.

1. Opettajan täytyy hallita sekä matemaattisen käsitteen perusteet että väline, jolla sitä konkretisoidaan. Ensin kannattaa kokeilla välineen käyttöä itse. Jos tuntuu tarpeelliselta, kannattaa asiaa kokeilla ja pohtia vielä toisen opettajan kanssa.
2. Tukiopetuksessa opettaja voi kokeilla edellä oppimiaan taitoja 1 - 2 oppilaan kanssa.
3. Käsitteen opetus kannattaisi suunnitella noudattamaan abstraktion tietä:
 - * lähdetään omista kokemuksista
 - * tehdään konkreettisilla välineillä
 - * piirretään ja tarkastellaan kuvia
 - * opetellaan liittämään toiminta ja piirroksat kirjoitettuun matematiikan kieleen
 - * joka vaiheessa selostetaan ääneen tekemistä
 - * näistä vaiheista muodostuviin muistijälkiin voidaan palata, kun tehtävä pitää ratkaista edellistä abstraktimmalla tasolla.
4. Aloitettaessa välineillä työskentely on syytä edetä hitaasti, pienin askelin ja vaihe kerrallaan. Tällöin kaikki oppilaat omaksuvat tarkoituksenmukaiset työskentelytavat.
5. Välineiden käyttöä opetetaan kaikille, ei vain heikosti suoriutuville.

6. Työrauha on parempi pienessä opetusryhmässä kuin koko luokan tunneilla. Tällöin välineillä työskentelyä on helpompi toteuttaa.
7. Opetustilanteen hallintaa ja tarkkailua luokassa helpottaa, kun oppilaat työskentelevät pareittain ja/tai 4-5 hengen ryhmissä.

KYMPPI-filmien nettiosoitteet:

- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi1
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi2
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi3
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi4
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi5
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi6
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi7
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi8
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi9
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi10
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi11
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi12
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi13
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi14
- * www.kaikkioppivat.fi/kymppi/filmi15

Filmi 1.

9:18



10-pari, tupla ja melkein kuin tupla

Lukualueen 0-20 yhteen- ja vähennyslaskujen strategioita eri välineillä.

10-pari sormilla



Laita kädet pöydälle, peukut vierekkäin.

Miten tämä lasku $2 + \underline{\quad} = 10$ tehdään?

Laita sormet niin, että vain 2 vasemmassa reunassa näkyy ja muut ovat piilossa. Kuinka monta on piilossa? 8.

Täydennä kortissa oleva lasku. 2 plus 8 on 10.

Puheessa riittää "on", vaikka =-merkki luetaankin "on yhtä suuri kuin". Varmista tämän osaaminen.

Sitten tehdään tämä: $\underline{\quad} + 4 = 10$.

Sormet ensin auki. Laita niin, että vain 4 näkyy oikean käden oikeassa reunassa, ja muut ovat piilossa. Kuinka monta on piilossa? 6. Täydennä kortissa oleva lasku. 6 plus 4 on 10.

Seuraavaksi tämä lasku: $7 + \underline{\quad} = 10$.

Sormet taas ensin auki. Nyt näkyy 7 ja muut ovat piilossa. Kuinka monta on piilossa? Piilossa on 3. Mikä lasku? 7 plus 3 on 10. Seiskan 10-pari on siis 3.

Nyt taas sormet auki. Tehdään tällainen lasku: $10 - 2 = \underline{\quad}$.

Kymmenestä otetaan pois kaksi. Laita 2 piiloon oikean käden oikeasta reunasta. Kuinka monta jää näkyviin? 8. Mikä on 2:n sydänpari tai kymppipari? 8.

Sormet auki: $10 - 4 = \underline{\quad}$.

Miten tämä tehdään? Kerro se samalla ääneen.

10:stä otetaan pois 4 oikealta, ja näkyviin jää 6.

10 miinus 4 on 6. Siis 4:n kymppipari on 6.

Sormet auki: $10 - 7 = \underline{\quad}$. Miten tämä tehdään?

Otetaan 7 taivuttamalla oikealta. Vasemmalle jää 3 sormea. 10 miinus 7 on 3. Siis 7:n 10-pari on 3.

10-pari 10-helmillä



Kortti: $2 + \underline{\quad} = 10$. Miten tämä tehdään?

Vasemmalla olevalla punaisella linnulla on 2 matoa.

Laita loput keltaiselle. Kuinka monta sille tuli? 8.

Mikä on kakkosen sydänpari tai kymppipari? 8.

Kortti: $\underline{\quad} + 4 = 10$

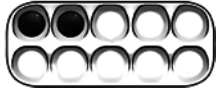
Oikealla olevalla keltaisella linnulla on 4 matoa.

Kuinka monta on punaisella? 6.

Kortti $10 - 7 = \underline{\quad}$

Kaikki 10 helmeä ovat vasemmalla. Siirretään niistä 7 oikealle. Vasemmalle jää 3. Voidaan kertoa tarina.

10-pari munakennolla

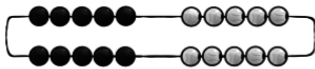


Kortti $2 + \underline{\quad} = 10$. Vasempaan yläreunaan laitetaan 2.
Kuinka monta pitää laittaa lisää, jotta 10 tulisi täyteen? 8.
Kakkosen kymppipari on siis 8.

Kortti $10 - 4 = \underline{\quad}$

Munakenno on täynnä. Oikeasta alareunasta otetaan pois 4.
Kuinka monta jää jäljelle? 6. Kymppipari 4 ja 6 löytyi.

Tupla Tupla-Kympillä



Alussa kaikki helmet ovat oikealla. Kortti: $4 + 4 = \underline{\quad}$

Annetaan kummallekin linnulle yhtä monta marjaa.
Kuinka monta annetaan kummallekin? 4.
Kuinka monta marjaa niillä on yhteensä? 8.

Kortti $7 + 7 = \underline{\quad}$

Annetaan taas kummallekin linnulle yhtä monta marjaa.
Kuinka monta annetaan kummallekin? 7.
Kuinka monta marjaa niillä on sitten yhteensä? 14.

Kortti: $8 - 4 = \underline{\quad}$

Laitetaan 8 helmeä **tuplana** eli 4 ja 4. Otetaan toinen tupla 4 pois. Kuinka monta jää jäljelle? Se toinen 4.

Kortti: $14 - 7 = \underline{\quad}$

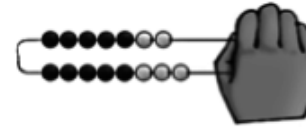
Laitetaan 14 helmeä **tuplana** eli 7 ja 7. Otetaan toinen tupla 7 pois. Kuinka monta jää jäljelle? Se toinen 7.

Melkein kuin tupla Tupla-Kympillä

Kortti: $4 + 5 = \underline{\quad}$ Kerro tästä tarina.

Punainen tipu osti 4 marjaa ja keltainen osti 5.
Kuinka monta marjaa niillä on yhteensä? 9.
Miten se tupla $4 + 4$ näkyy? Oppilas siirtää alemmalla tangolla olevan yhden helmen oikealle.

Kortti: $7 + 8 = \underline{\quad}$ Kerro tästä tarina.



Toinen ottaa 7 ja toinen 8. Kuinka monta on yhteensä? 15.
Lukumäärä 15 näkyy esimerkiksi seuraavasti:
 $5 + 5 = 10$ ja $2 + 3 = 5$, joten $10 + 5 = 15$.

Miten se tupla $7 + 7$ näkyy? Yksi helmi alemmalla tangolla siirretään hieman oikealle.

*Tupla $8 + 8$ taas näkyy, kun yksi helmi lisätään ylemmälle tangolle.
Molempia tuplia kannattaa käyttää apuna, kun etsitään melkein kuin tuplia.*

Kun lukualueen 0-20 yhteen- ja vähennyslaskujen strategioita opetetaan eri välineiden avulla, pyydetään oppilaita kertomaan tarinoita, jotka liittyvät tekemiseen.

Mitä tässä opiskeltiin?

10-pari on tutuin ja helpoin lukualueen 0-20 yhteen- ja vähennyslaskujen strategioista. Eri välineet innostavat oppilaita kertomaan erilaisia tarinoita.

Tupla ja melkein kuin tupla opitaan Tupla-Kympin avulla, jonka voi myös tehdä rautalangasta ja helmistä.

Filmi 2.

7:32



10 lisää ja 10 pois, 9 lisää ja 9 pois

Lukualueen 0-20 yhteen- ja vähennyslaskujen strategioita Tikku-Kympeillä.

Tikku-Kymppien tilalla voidaan käyttää 10:n munakennoja.

10 lisää

Toisessa Tikku-Kympissä on eri väriset tikut kuin toisessa, koska kyseessä on yhteenlasku.

v	v	v	.	.

t	t	t	t	t
t	t	t	t	t

Kortti: $3 + 10 = 10 + 3$

Vasemmalla on 3 tikkua, oikealla on 10.

Todetaan, että se on $3 + 10$. Tikkuja on yhteensä 13.

t	t	t	t	t
t	t	t	t	t

v	v	v		

Vaihdetaan Tikku-Kymppien paikkaa: nyt vasemmalla on 10 ja oikealla 3 tikkua. Tämä on $10 + 3$ ja tikkuja on taas yhteensä 13, eli yhtä monta kuin aikaisemmin.

Todetaan, että lasku $3 + 10 = 10 + 3$ voidaan lukea: $3 + 10$ on yhtä suuri kuin $10 + 3$.

Kortti: $5 + 10 = \underline{\quad}$

Vasemmalle laitetaan 5 tikkua ja oikealle 10.

Kuinka monta tikkua on yhteensä? 15.

10 pois

Molemmissa Tikku-Kympeissä on samanväriset tikut, koska kyseessä on vähennyslasku.

Kortti: $13 - 10 = \underline{\quad}$ Mikä lasku tässä on? 13 miinus 10. Ota nopeasti pois 10. Kuinka monta jää jäljelle? 3.

Kortti: $15 - 10 = \underline{\quad}$ Mikä lasku tässä on? 15 miinus 10. Ota nopeasti pois 10. Kuinka monta jää jäljelle? 5.

Kun oppilasta pyydetään ottamaan nopeasti pois 10, hänelle vahvistuu luvun 13 hajotelma (10 ja 3) sekä 10-järjestelmän alku.

9 lisää

v	v	v	.	.

t	t	t	t	t
t	t	t	t	

Kun mietitään laskua $3 + 9$, hyödynnetään tietoa $3 + 10 = 13$. Aluksi on 3 vaaleaa tikkua vasemmalla ja oikealla 10 tummaa tikkua. Täydestä 10:stä otetaan yksi tikku pois, jolloin saadaan tämä lasku: $3 + 9 = \underline{\quad}$

Yksi vaalea tikku siirretään tyhjään kohtaan oikeanpuoleiseen Tikku-Kymppiin. Saadaan lasku $2 + 10 = 12$. Siis $3 + 9 = 12$.

v	v	.	.	.

t	t	t	t	t
t	t	t	t	v

Kortti: $5 + 9 = \underline{\quad}$

Yksi vaalea tikku siirretään tyhjään kohtaan oikeanpuoleiseen Tikku-Kymppiin. Saadaan lasku $4 + 10 = 14$. Siis $5 + 9 = 14$.

Kortti: $7 + 9 = \underline{\quad}$

Yksi vaalea tikku siirretään tyhjään kohtaan oikeanpuoleiseen Tikku-Kymppiin. Saadaan lasku $6 + 10 = 16$. Siis $7 + 9 = 16$.

Tämä 9 plus ja seuraava strategia 9 pois vaativat rauhallista työskentelyä ja monta toistoa, kuten filmillä huomataan. Oppilaalle näytetään ensin, mitä voi tehdä. Hänen on kuitenkin itse oivallettava, miksi saadaan oikea tulos.

9 pois

v	v	v	v	v
v	v	v	v	v

v	v	v	.	.

Molemmista Tikku-Kympeissä on samanväriset tikut, Koska kyseessä on vähennyslasku. Kun mietitään laskua $13 - 9$, käytetään hyväksi tietoa ja taitoa, että $13 - 10 = 3$.

Kortti: $13 - 9 = \underline{\quad}$

Jos 13:sta otetaan pois 10, niin jää 3.

Kun ei saa ottaa pois koko kymppiä, vaan vain 9, niin täydestä 10:stä siirretään yksi tikku oikealla olevien 3 tikun lisäksi. Nyt vasemmalla on 9 ja oikealla on 4, ja silti edelleen on yhteensä 13 tikkua. Nyt voidaan ottaa 9 tikkua pois, ja jäljelle jää 4.

v	v	v	v	v
v	v	v	v	

v	v	v	v	.

Kortti $15 - 9 = \underline{\quad}$

Jos 15:sta otetaan pois 10, niin jää 5.

Koska nyt otetaan pois vain 9, niin täydestä 10:stä siirretään yksi tikku oikealla olevien 5 tikun lisäksi. Vasemmalla on 9 ja oikealla 6. Edelleen on yhteensä 15 tikkua. Nyt voidaan ottaa 9 tikkua pois. Jäljelle jää 6.

Kortti $17 - 9 = \underline{\quad}$

Jos 17:sta otetaan pois 10, niin jää 7.

Koska nyt otetaan pois vain 9, niin täydestä 10:stä siirretään yksi tikku oikealla olevien 7 tikun lisäksi. Vasemmalla on 9 ja oikealla 8. Edelleen on yhteensä 17 tikkua. Nyt voidaan ottaa 9 tikkua pois. Jäljelle jää 8.

Tikku-Kymppien tilalla voidaan käyttää 10:n munakennoja.



Mitä tässä opiskeltiin?

10-järjestelmän hallintaan liittyviä ensimmäisiä strategioita ovat 10 lisää ja 10 pois. Ne ovat useimmiten oppilaiden mielestä helppoja ja hauskoja.

Kun nämä on ensin opittu, voidaan tutkia strategioita 9 lisää ja 9 pois. Kokemuksieni mukaan nämä ovat vaikeimmat ja eniten aikaa vaativat strategiat.

Oivaltamisen ilo on ehkä suurin, kun oppilas ymmärtää juuri nuo vaikeat strategiat.

Filmi 3.

16:32



10:n ylitys, 10:n alitus ja analogia

10:n ylitys munakennoilla ja piirtämällä.
Analogian avulla laajennetaan lukualuetta.

10:n ylitys munakennoilla

Kortti: $8 + 5 = \underline{\quad}$

o	o	o	o	o		p	p	p	.	.
o	o	o	p	p						

Munakennoon laitetaan 8 omenaa niin, että aloitetaan vasemmasta yläreunasta edeten oikealle. Alarivillä myös vasemmalta oikealle. Alas oikealle jää 2 tyhjää kohtaa.

Sitten otetaan 5 päärynää niin, että ensin täytetään kymppi ja seuraavaan kennoon 3 kpl vasemmalle ylös. (Luvun 5 hajotelma on 2 ja 3.) Yhteensä on 13 hedelmää.

Suljetaan 10:n kenno, kun se on täynnä. Huomataan, että hedelmiä on $10 + 3$, yhteensä 13.

1	0					p	p	p	.	.

Kortti $18 + 5 = \underline{\quad}$

Otetaan 18 omenaa ja 5 päärynää lisätään vastaavalla tavalla. (Luvun 5 hajotelma on taas 2 ja 3.) Saadaan 23 hedelmää. Täydet kennot suljetaan. Huomataan, että hedelmiä on $20 + 3 = 23$.

Kortti $28 + 5 = \underline{\quad}$

Pöydällä on avonaiset munakennot, joissa 28 omenaa ja korissa 5 päärynää. Päärynöiden lisääminen toteutetaan edellä esitetyllä tavalla. Täydet kennot suljetaan. Huomataan, että hedelmiä on $30 + 3 = 33$.

10:n alitus munakennoilla

Kahdessa munakennossa on yhdenlaisia hedelmiä, koska kyseessä on vähennyslasku. Aluksi kennot ovat auki.

Kortti: $13 - 5 = \underline{\quad}$

Otetaan ensin pois 3 oikeanpuoleisesta kennosta, sitten 2 vasemman kennon oikeasta alareunasta. Jää 8.

Tämä tehdään myös täysi kenno suljettuna. Viereisessä kennossa näkyy 3 hedelmää.

Ensin oppilas selittää, miten otetaan 5 pois: ensin otetaan pois 3, sitten pitää kenno aukaista ja ottaa vielä 2 pois. Jäljelle jää 8. Sitten oppilas tekee saman.

Kolmessa munakennossa on 23 päärynää niin, että kaksi 10:n kennoa on suljettu.

Kortti: $23 - 5 = \underline{\quad}$

Ensin oppilas selittää, miten otetaan 5 pois: ensin otetaan pois 3, sitten pitää yksi kenno aukaista ja ottaa vielä 2 pois. Jäljelle jää 18. Sitten oppilas tekee saman.

Vastaavalla tavalla tehdään tämä lasku: $33 - 5$.

Joka kerta on tärkeää todeta, mihin kennoihin ei tarvittu koskea, ja minkä kennojen välissä 10:n alitus tapahtui. Näin hyödynnetään analogiaa.

10:n ylitys piirtämällä

Taululla piirros, jossa kaksi 10:n kennoa auki ja lasku $8 + 5$.

Muistellaan, miten näitä laskuja on tehty munakennoilla. Keksitään tarina laskulle $8 + 5$, esimerkiksi: aamulla kanalanhoitaja löysi 8 munaa ja illalla vielä 5. Kuinka monta löytyi yhteensä? Mitä luvun 5 hajotelmaa käytetään nyt?

Ensin väritetään yhdellä värillä 8 ympyrää. Sitten mietitään ääneen, kuinka ne 5 lisätään: ensin 2 ja sitten toiseen kennoon 3. Sen jälkeen väritetään ne 5 toisella värillä. Yhteensä 13.

Munakennoilla tehtäessä voidaan sulkea kenno. Piirtäessä kennon sulkeminen tapahtuu pyyhkimällä täydestä 10:stä ympyrät pois; tilalle kirjoitetaan luku 10. Pohditaan, onko kennoissa edelleen 13.

Taululla piirros, jossa kolme 10:n kennoa auki ja lasku $18 + 5$.

Keksitään tarina laskulle $18 + 5$, esimerkiksi: yhtenä päivänä kanalanhoitaja löysi 18 munaa ja seuraavana vain 5. Kuinka monta löytyi yhteensä?

Ensin väritetään yhdellä värillä 18 ympyrää. Sitten mietitään ääneen, kuinka ne 5 lisätään: ensin 2 ja sitten kolmanteen kennoon 3. (Luvun 5 hajotelma on taas 2 ja 3.) Sen jälkeen väritetään ne 5 toisella värillä. Yhteensä 23.

Piirtäessä kennon sulkeminen tapahtuu pyyhkimällä täysistä kympeistä ympyrät pois; tilalle kirjoitetaan luvut 10. Pohditaan, onko kennoissa edelleen 23.

Vastaavalla tavalla tehdään tämä lasku $28 + 5$.

Joka kerta on tärkeää todeta, mihin kennoihin ei tarvinnut koskea ja minkä kennojen välissä 10:n ylitys tapahtui.

10:n alitus piirtämällä

Taululla piirros, jossa yksi suljettu 10:n kenno ja sen oikealla puolella avonainen kenno, johon on 3 ympyrää väritetty.

Lasku $13 - 5 =$

Muistellaan kertoen, miten tällainen lasku tehtiin muna-kennoilla. Keksitään laskusta tarina: Kaapissa on 13 munaa. Leipomiseen tarvitaan 5 munaa. Kuinka monta munaa jää jäljelle? Voidaanko piirroskuvasta ottaa pois 5? Koska ei voida, joudutaan aukaisemaan kenno eli pyyhittää pois luku 10 ja piirretään tilalle 10 samanväristä ympyrää kuin ne 3.

Nyt voidaan poistaa ensin 3 sitten 2 kennon alareunasta viivaamalla yli ympyrät. (Luvun 5 hajotelma on 3 ja 2.) Jäljelle jää 8, jotka on helppo nähdä, kun ylärivissä on 5 ja alarivissä on 3.

Taululla piirros, jossa kaksi 10:n munakennoa kiinni ja sen oikealla puolella avonainen kenno, johon on 3 ympyrää väritetty.

Lasku $23 - 5 =$

Keksitään laskusta tarina: kaapissa on 23 munaa. Leipomiseen tarvitaan 5 munaa. Kuinka monta munaa jää jäljelle? Voidaanko piirroskuvasta ottaa pois 5? Koska ei voida, joudutaan aukaisemaan yksi kenno eli pyyhittää pois luku 10 ja piirretään tilalle 10 samanväristä ympyrää kuin ne 3. Nyt voidaan poistaa ensin 3 sitten 2 kennon alareunasta viivaamalla yli ympyrät, yli jää 8. Jäljelle jää 10 ja 8 eli 18.

Vastaavalla tavalla tehdään ja mietitään ääneen nämä laskut: $33 - 5$ ja $43 - 5$ ja $53 - 5$ jne.

Joka kerta on tärkeää todeta, mihin kennoihin ei tarvittu koskea, ja minkä kennojen välissä kympin alitus tapahtui.

10:n ylitys ja 10:n alitus vaatii hyvää lukujen 2 – 9 hajotelmien osaamista.
Analogian avulla saadaan lukualuetta laajennettua.

Mitä tässä opiskeltiin?

Välineillä työskentely, työskentelyn ääneen selostaminen sekä piirtäminen ja puhe ovat tärkeitä opiskeltaessa näitä tunnetusti vaikeita strategioita 10:n ylitys ja 10:n alitus. Jokaisen vaiheen jälkeen kannattaa kartoittaa oppilaiden taidot.

Vaikka tavoitteena on automaation tason saavuttaminen, oppilaat voivat turvautua välivaiheisiin esimerkiksi niin, että tekevät laskun välineillä tai piirtävät laskun ajattelunsa tueksi.

Filmi 4.

12:03

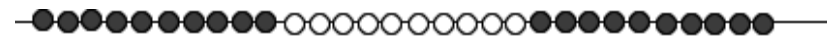


Kertolaskua

Kertolaskun käsitteen opiskelu selkeillä välineillä auttaa kertotaulujen oppimista.

5:n kertotaulu 100-helminauhalla ja pyykkipojilla

Taululla 100-helmet, väri vaihtuu 10:n välein.



Tutkitaan 100-helminauhaa: kuinka monta helmeä siinä on? Missä kohdassa on puolet helmistä? Kuinka monta helmeä on puolet sadasta helmestä? Kuinka monta helmeä saadaan, jos 50 helmeä otetaan 2 kertaa?

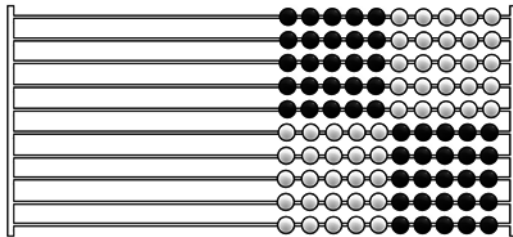
Viisi helmeä siirretään vasemmalle kerralla, ei yksitellen.

Pyykkipoika laitetaan näiden jälkeen. Sanotaan: yksi kertaa 5 on 5. Seuraavan viiden ryhmän ja pyykkipojan jälkeen sanotaan: kaksi kertaa 5 on 10. Samalla tavalla jatketaan 50:een asti. Tähän loppuvat kertotaulut oppikirjojen mukaan. Tästä jatketaan vielä 11 kertaa 5 on 55 ja 12 kertaa 5 on 60. On hyvä jatkaa 100-helminauhan loppuun asti, mutta tällöin riittää sanoa vain lukujono: 65, 70, 75,95 ja 100.

Oppilas voi myös luetella kertolaskut 100:aan asti.

Kun 100-helminauha on täynnä pyykkipoikia viiden helmen välein, pohditaan: Kuinka monta viitosta tässä näkyy?

5:n kertotaulu 100-helmitaululla



Kannattaa käyttää helmitaulua, jossa on jossa kaksi väriä viiden välein (ks. kuva yllä). Tutkitaan, kuinka monta helmeä on helmitaulussa ja miten ne on siihen sijoitettu.

Kaikki helmet siirretään oikealle. Ylimmältä tangolta siirretään 5 helmeä vasemmalle ja sanotaan: yksi kertaa 5 on 5. Toiselta tangolta siirretään 5 helmeä vasemmalle ja sanotaan: kaksi kertaa 5 on 10. Näin jatketaan, kunnes vasemmalla on 50 helmeä eli 10 kertaa 5.

Huomataan, että nyt on puolet helmistä vasemmalla ja puolet oikealla. Kuinka monta helmeä saadaan, jos otetaan kaksi kertaa 50? Kuinka monta helmeä saadaan, jos otetaan puolet sadasta.

Jatketaan kertotaulun luettelemista samalla siirtäen oikealla ylhäällä olevia viiden ryhmiä vasemmalle: 11 kertaa 5 on 55, 12 kertaa 5 on 60. Tämän jälkeen riittää luetella lukujono 65, 70, 75, ... 95 ja 100.

Vaihtoehtoisesti voidaan helmiä siirtää oikealta vasemmalle niin, että kahden viitosen jälkeen yltätangolla on 10, neljän viitosen jälkeen 20, kuuden viitosen jälkeen 30, jne. Tämä helpottaa lukumäärien hahmottamista.

Kortissa on lasku $3 \cdot 5$ ja kaikki helmet ovat oikealla.

Siirretään kolme allekkain olevaa viiden helmiryhmää vasemmalle. Sanotaan: kun otetaan 3 kertaa 5 helmeä, saadaan 15 helmeä“.

Kortissa on lasku $7 \cdot 5$ ja kaikki helmet ovat oikealla. Siirretään 7 allekkain olevaa 5:n helmiryhmää vasemmalle. Sanotaan: Kun otetaan 7 kertaa 5 helmeä, saadaan 35 helmeä.

Kortissa on lasku $12 \cdot 5$, kaikki helmet ovat oikealla.

Siirretään ensin 10 allekkain olevaa viiden helmiryhmää vasemmalle ja sitten vielä oikealta ylhäältä kaksi ryhmää. Sanotaan: Kun otetaan 12 kertaa 5 helmeä, saadaan 60 helmeä.

Tällä selkeällä helmitaululla, jossa on helmet viiden välein, voidaan tehdä myös mm. seuraavat kertotaulut allekkain:

$6 = 5+1$, $7 = 5+2$, $8 = 5+3$, $9 = 10-1$ ja 10 .

5:n kertotaulu nopilla



Kertolaskukortit $0 \cdot 5 - 12 \cdot 5$, lautasella on 12 noppaa.

Kaadetaan nopat pöydälle ja katsotaan, kuinka monta viitosta saatiin. Etsitään löytyneiden 5-noppien lukumäärää vastaava kertolaskukortti ja sanotaan se ääneen. Löytyneet 5-nopat ja kortti laitetaan koriin vierekkäin.

Heitetään jäljelle jääneet nopat pöydälle, katsotaan kuinka monta viitosta löytyi ja sanotaan ääneen lasku. Löytyneitä

5-noppia vastaava kertolaskukortti laitetaan koriin entisen kortin päälle ja nopat edellisten 5-noppien viereen parijonoon.

Todetaan kuinka monta 5-noppaa on nyt yhteensä korissa ja sanotaan lasku. Näin jatketaan kunnes kaikki 12 noppaa ovat korissa. Todetaan, että 12 kertaa 5 on 60.

Yhdellä nopalla voidaan tehdä kertotaulut $1 - 5$.

Kahdella nopalla voidaan tehdä seuraavia kertotauluja:

$6 = 5+1$, $7 = 5+2$, $8 = 5+3$ tai $8 = 4 + 4$.

5:n ja 10:n kertotaulut uraviivaimella

Kaksi lautasta, joissa toisessa on 5 cm:n pituisia keltaisia ja toisessa oransseja 10 cm:n pituisia värisauvoja sekä kaksi 100 cm:n pituista uraviivainta allekkain.

Tutkitaan värisauvoja ja niiden pituuksia. Laitetaan 5 cm:n pituinen sauva ylemmän uraviivaimen alkuun ja sanotaan: yksi kertaa 5 on 5. Laitetaan toinen 5 cm:n pituinen sauva edellisen perään hieman syrjälleen, jotta ne näkyvät erikseen. Sanotaan: 2 kertaa 5 on 10. Sitten laitetaan alemman uraviivaimen alkuun 10 cm:n pituinen sauva ja sanotaan: yksi kertaa 10 on 10. Todetaan että uraviivaimilla olevat sauvajonot ovat yhtä pitkät.

Laitetaan kolmas 5 cm:n sauva edellisten perään hieman syrjälleen, jotta se erottuu edellisestä. Sanotaan: 3 kertaa 5 on 15. Yksi sauva taas lisää ja sanotaan: 4 kertaa 5 on 20. Alempaan uraviivaimeen laitetaan toinen 10 cm:n sauva vähän syrjälleen ja sanotaan: 2 kertaa 10 on 20. Todetaan taas, että sauvajonot ovat yhtä pitkät: 20 cm.

Näin jatketaan, kunnes on saatu 50 cm pitkät sauvajonot. Huomataan, että nyt ollaan uraviivanten puolessa välissä. Jäljellä on vielä 50 cm. Jatketaan: 11 kertaa 5 on 55 ja 12 kertaa 5 on 60 sekä 6 kertaa 10 on myös 60.

Jatketaan uraviivainten loppuun asti. Nyt riittää, että luetellaan vain lukujono, ei kertolaskuja: 65, 70, ..., 95 ja 100.

Mikäli oppilas haluaa, hän voi myös luetella kertolaskut kummallakin uraviivaimella 100:aan asti.

Kuinka monta kymppiä mahtuu sataseen? 10.

Kuinka monta viitosta mahtuu sataseen? 20.

2:n, 4:n ja 8:n kertotaulut uraviivaimella

Kolme lautasta, joista yhdessä on 2 cm:n pituisia, toisessa 4 cm:n ja kolmannessa 8 cm:n pituisia värisauvoja sekä kolme 100 cm:n pituista uraviivainta allekkain.

Tutkitaan värisauvoja ja niiden pituuksia. Laitetaan 8 cm:n pituinen sauva alimman uraviivaimen alkuun ja sanotaan: yksi kertaa 8 on 8. Laitetaan yksi 4 cm:n pituinen sauva keskimmäisen uraviivaimen alkuun ja sanotaan: 1 kertaa 4 on 4, sitten laitetaan toinen 4 cm:n sauva ensimmäisen perään hieman syrjälleen, jotta se erottuu edellisestä. Sanotaan 2 kertaa 4 on 8. Todetaan, että nämä kaksi tehtyä sauvajonoa ovat yhtä pitkät eli $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$.

Sitten laitetaan ylimmän uraviivaimen alkuun 2 cm:n pituinen sauva ja sanotaan: yksi kertaa 2 on 2. Jatketaan laittamalla lisää näitä sauvoja ja sanotaan: 2 kertaa 2 on 4, 3 kertaa 2 on 6, 4 kertaa 2 on 8. Todetaan, että kolmella uraviivaimella olevat sauvajonot ovat yhtä pitkät, eli $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$.

Näin jatketaan, kunnes on saatu 40 cm pitkät sauvajonot. Jatketaan uraviivanten loppuun asti. Nyt riittää, että luetellaan vain lukujonot, ei kertolaskuja.

Huomataan, että 2 cm:n ja 4 cm:n pituisista sauvoista saadaan 100-uraviivain täyteen, mutta koska 12 kertaa 8 on vasta 96, pitää lisätä yksi nelosen sauva, että saadaan 100 täyteen.

Merkintä $12 \cdot 8 + 4 = 100$ voi olla mielenkiintoa herättävä, koska se on juuri itse tehty. Mikäli oppilas haluaa, hän voi myös luetella kertolaskut kaikilla kolmella uraviivaimella 100:aan asti.

Kertotaulujen oppiminen helpottuu, jos kertolaskun käsitettä on harjoiteltu selkeillä välineillä.

Mitä tässä opiskeltiin?

Kertolaskun käsitteen opiskelu helpottuu kun käytetään samoja välineitä sekä käsitteen oppimisessa että kertotaulujen opettelussa. Saadaan uutta haastetta, kun työskennellään konkreettisesti koko lukualueella 0 - 100.

Ennen kuin opetellaan kertotauluja ulkoa, oppilaille opetetaan eri strategioita, jotka helpottavat muistamista. Esimerkiksi 5:n ja 10:n kertotaulut tehdään samanaikaisesti, samoin 2:n, 4:n ja 8:n kertotaulut. Tällöin voidaan oppia, että osaamalla yhden kertolaskun (esim. $3 \cdot 8$), voi sen avulla osata ja muistaa toisen ($6 \cdot 4$).

Filmi 5.

14:13



Jakolaskua

Ositus- ja sisältöjakolaskua sekä niitä vastaavat kertolaskut.

Ositusjako 24 : 2.

24 päärynää korissa ja 2 lautasta vieressä

Annetaan suullinen ohje, että päärynät jaetaan kahdelle lautaselle niin, että molemmille lautasille tulee yhtä monta päärynää. Kun oppilas laskee, kuinka monta tuli kummallekin, kehoitetaan häntä laskemaan pareittain (2, 4, 6, ..., 12).

Nyt näytetään lasku $24 : 2$ kortilla.

Pohditaan, mitä merkintä tarkoittaa verrattuna äsken tehtyyn jakolaskuun. (Filmillä olevat oppilaat eivät olleet koulussa vielä tehneet jakolaskuja, siksi asiaa pohditaan pitkään.)

Mikä kertolasku on oikein: $2 \cdot 12 = 24$ vai $12 \cdot 2 = 24$?
Pyydetään oppilasta perustelemaan valintansa.

Ositusjako 24 : 3

24 päärynää korissa ja 3 lautasta vieressä

Annetaan suullinen ohje, että päärynät jaetaan kolmelle lautaselle niin, että jokaiselle lautaselle tulee yhtä monta päärynää. Kun oppilas laskee, kuinka monta tuli kummallekin, kehoitetaan häntä laskemaan pareittain (2, 4, 6, ..., 12).

Näytetään lasku $24 : 3$ kortilla.

Pohditaan, mitä merkintä tarkoittaa verrattuna äsken tehtyyn jakolaskuun.

Mikä kertolasku on oikein: $3 \cdot 8 = 24$ vai $8 \cdot 3 = 24$?
Pyydetään oppilasta perustelemaan valintansa.

Ositusjako 24 : 4

24 päärynää korissa ja 4 lautasta vieressä

Annetaan suullinen ohje, että päärynät jaetaan neljälle lautaselle niin, että jokaiselle lautaselle tulee yhtä monta päärynää. Kun oppilas laskee, kuinka monta tuli kummallekin, kehoitetaan häntä laskemaan pareittain (2, 4, 6, ..., 12).

Nyt näytetään lasku $24 : 4$ kortilla. Pohditaan, mitä merkintä tarkoittaa verrattuna äsken tehtyyn jakolaskuun.

Mikä kertolasku on oikein: $4 \cdot 6 = 24$ vai $6 \cdot 4 = 24$?
Pyydetään oppilasta perustelemaan valintansa.

Ositusjako 24 : 5

24 päärynää korissa ja 5 lautasta vieressä

Annetaan suullinen ohje, että päärynät jaetaan viidelle lautaselle niin, että jokaiselle lautaselle tulee yhtä monta päärynää. Huomataan, että kaikille lautasille ei tullut yhtä monta päärynää. (Siis jako ei mennyt tasan.)

Pohditaan tilannetta ja todetaan, ettei tästä jakolaskusta voi tehdä kertolaskua.

Ositusjako 24 : 8

24 päärynää korissa ja 8 lautasta vieressä

Annetaan suullinen ohje, että päärynät jaetaan kahdeksalle lautaselle niin, että jokaiselle lautaselle tulee yhtä monta päärynää. Kun oppilas laskee, kuinka monta tuli kummallekin, kehoitetaan häntä laskemaan pareittain (2, 4, 6, ..., 12).

Nyt näytetään lasku $24 : 8$ kortilla.

Pohditaan, mitä merkintä tarkoittaa verrattuna äsken tehtyyn jakolaskuun.

Mikä kertolasku on oikein: $3 \cdot 8 = 24$ vai $8 \cdot 3 = 24$?
Pyydetään oppilasta perustelemaan valintansa.

Sisältöjako 24 : 3

24 omenaa korissa ja vieressä pino lautasia

Kortti $24 : 3 =$

Annetaan suullinen ohje: nyt jaetaan omenat niin, että joka lautaselle tulee 3 omenaa.

Filmillä oppilas laittaa joka lautaselle kolmen omenan lisäksi tikun, joka on mato..

Kun jokaisella kahdeksalla lautasella on 3 omenaa, kysytään:
Menikö tasan?

Kun jaettiin 24 niin, että joka lautaselle tuli 3, niin kuinka monta lautasta tarvittiin? Tarvittiin 8 lautasta.

Kortit $8 \cdot 3 = 24$ ja $3 \cdot 8 = 24$

Kumpi kertolasku on oikea? $8 \cdot 3 = 24$. Minkä takia?

Koska lautasia on yhteensä 8 ja niiden sisällä on omenoita 3.

Kun joka lautasella on yhtä monta, silloin siitä tulee kertolasku.

Sisältöjako 24 : 8

Kori on tyhjä, 3:lla lautasella on 8 omenaa, muutama lautanen on pinossa tyhjänä.

Kortti $24 : 8 =$

24 omenaa on jaettu niin, että jokaiselle lautaselle on tullut 8 omenaa. Kuinka monta lautasta tarvittiin? Kolme.

Kortit $8 \cdot 3 = 24$ ja $3 \cdot 8 = 24$.

Kumpi kertolasku on oikein? $3 \cdot 8 = 24$. Minkä vuoksi?
Koska lautasia on 3 ja joka lautasella on 8 omenaa.

Sisältöjako 24 : 4

24 omenaa korissa ja vieressä pino lautasia

Kortti: $24 : 4 =$

Siinä on 24 omenaa ja nyt pitää jakaa niin, että jokaiselle lautaselle tulee 4 omenaa.

Tämä on nimeltään sisältöjakoa.

Kuinka monelle lautaselle riitti 24 omenaa, kun jokaiselle lautaselle laitettiin 4 omenaa? Kuudelle lautaselle.

Kortit $4 \cdot 6 = 24$ ja $6 \cdot 4 = 24$

Kumpi kertolasku on oikea? $6 \cdot 4 = 24$. Minkä takia?

Koska lautasia on kuusi ja niiden sisällä on omenoita 4.

Kun joka lautasella on yhtä monta, silloin siitä tulee kertolasku.

Tilanteesta selviää, kumpaa jakolaskua käytetään.

Jakolaskua vastaavan kertolaskun löytäminen on haastavaa.

Mitä tässä opiskeltiin?

Sisältöjaon käsite tuli ilman merkintöjä esille filmissä nro 4, jossa 100-helminauhaa ryhmiteltiin 5:n ryhmiin ja todettiin, että viitosia mahtuu 100:aan 20 kpl. Myös uraviivaimella todettiin vastaavia sisältöjakotilanteita ilman jakolaskumerkintöjä.

Ositusjako on tuttua oppilaille pienestä pitäen tilanteista, joissa jaetaan “sulle ja mulle”. Kahdella tai kahdelle jakamisesta aloitetaan myös tällä filmillä ositusjako. Kun samaa määrää 24 jaetaan eri määrille lautasia (2, 3, 4 jne.), oppilaat kokevat jakamisen helpoksi. Pientä ongelmaa syntyy, kun kahdesta kertolaskusta pitää päätellä, kumpi vastaa äsken tehtyä jakolaskua.

Filmissä tehtiin sisältöjakoa pienille lautasillem ja kysyttiin kuinka monta lautasta tarvittiin. Kertolasku etsittiin kahdesta valmiista kertolaskusta. On hyvä, että oppilas itse osaisi sanoa jako-laskua vastaavan kertolaskun.

Sisältöjakoa voidaan harjoitella myös seuraavasti: 24 hedelmää laitetaan pusseihin eri tavoin: joka pussiin 12 tai 6 hedelmää, jne. Kuinka monta pussia tarvitaan?

Monille oppilaille ja opettajallekin on ositus- ja sisältöjaon ero selvinnyt näistä esimerkeistä:

$12 \text{ €} : 2 = 6 \text{ €}$ eli 12 € jaetaan 2:lle tasan, kumpikin saa 6 €. Kertolaskuna: $2 \cdot 6 \text{ €} = 12 \text{ €}$.

$12 \text{ €} : 2 \text{ €} = 6$ eli 12 €:sta saadaan 2 €:n kolikoita 6 kpl. Kertolaskuna: $6 \cdot 2 \text{ €} = 12 \text{ €}$.

Myöhemmin murtolukuja jaettaessa on oppilaiden osattava päätellä, kumpaa jakolaskua käytetään ajattelun tukena. Esimerkiksi yksi kolmasosa jaetaan 2:lla onnistuu ositus-jakona, mutta yksi kolmasosa jaettuna yksi kuudesosalla onnistuu vain sisältöjaon avulla ajatellen: Kuinka monta kuudesosaa sisältyy kolmasosaan?

Filmi 6.

15:16



Lukuja 10-järjestelmävälineillä

Lukujen rakentamista 10-järjestelmävälineillä ja lukukorteilla

“Välitunnilla oli oppilaita. Tämä 1-kuutio esittää yhtä oppilasta. Oppilaita oli näin monta (purkista kaadetaan kasa 1-kuutioita pöydälle). Seuraavalla välitunnilla oli näin monta oppilasta (toisesta purkista kaadetaan pöydälle kasa kuutioita). Kummalla välitunnilla oli enemmän oppilaita? Arvaa.” Laskepa “oppilaat” yksitellen ääneen. Kun on mahdollista, vaihda 10-sauvoiksi. Tuli 48 ja 54 oppilasta.

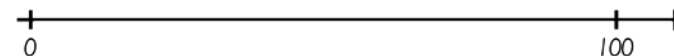
Näytä oppilaiden lukumäärät myös **lukukorteilla** 48 ja 54. Huomataan, että $54 > 48$.

Lukujen vertailua uraviivaimilla

Sijoita “oppilaat” kahteen eri uraviivaimeen. Nytkin on $54 > 48$.

Kuinka monta oppilasta enemmän oli jälkimmäisellä välitunnilla? Kuusi. Kuinka monta vähemmän oppilasta oli ensimmäisellä välitunnilla? Kuusi.

Taululla on blanko-lukusuora 0 – 100.



Merkitse luvun 50 paikka. Missä on 48 ja missä 54? Kuinka monta oppilasta tarvittaisiin 48:aan lisää, että heitä olisi 50? Kaksi. Entä kuinka monta oppilasta pitää ottaa pois 54:stä, että jää 50? Neljä. Erotus on kuusi.

Lukumäärät yhdistetään

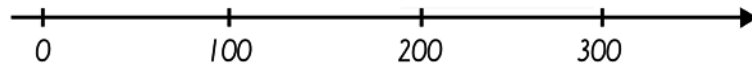
“Seuraavana aamuna on edellisten oppilaiden (48 ja 54) lisäksi näin monta oppilasta (purkista kaadetaan pöydälle 10-sauvoja ja 1-kuutioita). Kuinka monta oppilasta on nyt välitunnilla? Laske erikseen kymmit: 15 kymppiä Laske erikseen ykköset: 21 ykköstä. Sano tämä lukumäärä ääneen: 15 kymppiä ja 21 ykköstä.

Lukumäärä TSKY-alustalle

Tästä ei vielä selviä oppilaiden lukumäärä. Vaihda 100-levyksi nuo 10 kymppiä ja sano ääneen: 1 S 5 K 21 Y. Vieläkin on vaikeaa tietää, kuinka monta oppilasta on pihalla. Vaihda vielä 10-sauvoiksi nuo 1-kuutiot, ja sano ääneen saamasi luku: 1 sata, 7 kymppiä ja 1 ykkönen.

Lukumäärä laitetaan TSY-alustalle. Kuinka monta oppilasta oli? 171. **Lukukorteilla** tämä luku on **171**.

Taululla on blanko-lukusuora 0 – 300:



Missä on luvun 171 paikka? Etsi ensin vaikkapa 150 ja sitten 171.

- * Minkä 100-lukujen välissä on luku 171. (Lukujen 100 ja 200 välissä.)
- * Kirjoitetaan: $__ < 171 < __ \rightarrow 100 < 171 < 200$
- * Kumpaa satasta lähempänä 171 on? 200. Ympyröi 200.
- * Kuinka lähellä 171 on lukua 200?
- * Jos se olisi 170, kuinka monta askelta on 200:aan? 30.
- * Entä 171:stä 200:aan? 29.

Lukujen pyöristämistä kannattaa harjoitella blanko-lukusuoran avulla.

Mitä tässä opiskeltiin?

Lukujen hajotelmat tehdään perinteisesti näin:

$171 = 100 + 70 + 1$. Lukukäsitteen vahvistamiseksi kannattaa tehdä monenlaisia muitakin lukujen hajotelmia 10-järjestelmävälineillä:
 $171 = 15 K + 21 Y$.

Luvun 171 paikan löytäminen tyhjällä lukusuoralla on oppilaista mielenkiintoista. Lukusuorasta on apua myös luvun 171 pyöristämiseen lähimpään sataan.

Filmi 7.

6:05



Lukuja 10-järjestelmävälineillä, nopat apuna

TSKY-alustalle heitetään noppia, joissa on luvut 1-20.

Satasia 4, kymppejä 11, ykkösiä 8.

Sanotaan: 4 sataa, 11 kymmentä ja 8 ykköstä. Voitko vaihtaa jotakin isommaksi? 11 kymmentä, siitä tulee 1 sata ja 1 kymppi. Mikä luku tuli? **518**.

Saat heittää noppia uudestaan ja ottaa lisää välineitä.

Lisää tuli 1 sata, 16 kymppiä ja 4 ykköstä.

Saatiin yhteensä **6 sataa, 17 kymppiä ja 12 ykköstä**.

Pystytkö vaihtamaan? 12 ykköstä on 1 kymppiä ja 2 ykköstä.

Saatiin luku **7 sataa, 7 kymppiä ja 2 ykköstä**.

Uudet nopat

TSKY-alustalle heitetään neljä pistenoppaa, yksi erivärinen noppa jokaisen lukuyksikön kohdalle.

10-järjestelmävälineillä rakennetaan luku:

ykkösiä tulee 6, kymppejä 1, satasia 5 ja tuhansia 6.

Mikä luku saatiin?

6 tuhatta, 5 sataa, 1 kymppi ja 6 ykköstä.

Myös pistenoppien avulla saadaan rakennettua suuria lukuja.

Mitä tässä opiskeltiin?

Nopat tuovat mielenkiintoa lukujen rakentamiseen 10-järjestelmävälineillä. Numeronoppien 1-20 avulla saadaan melko pian lukujen hajotelmia, esimerkiksi 17 kympestä saadaan 1 sata ja 7 kymppiä. Ääneen puhuminen on tärkeää. Suurten lukujen rakentaminen kiehtoo oppilaita.

Filmi 8.

10:36



Kaksinkertainen

Kaksinkertainen tehdään aluksi vain muutamalla esineellä. "Miten saat kaksinkertaisen?"

Välitunnilla oli 171 oppilasta

"Saat ottaa 3 korvapuustia. Kuinka monta korvapuustia saat, jos ottaisit kaksin-kertaisen määrän?" "Kuusi." "Minkälainen kertolasku tästä saadaan?" $2 \cdot 3 = 6$."

"Laitetaanpa niin, että sinulla on 2 kertaa kuusi korvapuustia." Mitä siinä on otettu kaksi kertaa? "Kuusi korvapuustia." Silloin sanotaan, että siinä on kaksinkertainen määrä."

"Eilen laskettiin välitunneilla olevia oppilaita, joita oli 171." Taululla piirros:

S	K	Y
		.

Rakenna 10-järjestelmävälineillä 171 oppilasta. "Jos oppilaita olisi kaksinkertainen määrä, kuinka monta heitä olisi?"

Laita lukumäärät TSKY-alustalle.

Nyt siinä on yhden kerran 171. Laita vielä kaksinkertainen määrä. Piirrä taulullekin toisen kerran 171.

S	K	Y
		.
		.

Mikä lasku saataisiin? Allekkain $171 + 171 = 342$.

Tule laskemaan välineillä, kuinka monta oppilasta.

Ykkösiä on 2, kymppejä on 14. Missä se 14 kymppiä on taululla? Mitä se ykkönen tarkoittaa allekkainlaskussa? Vaihtaa 10 kymppiä yhdeksi 100-levyksi ja laittaa seen TSKY-aulukon yläpuolelle S:n yläpuolelle. Missä se yksi sata on siellä allekkainlaskussa taululla? (Näyttää muistinumeroa 1 sarakkeessa S.) Mistä se yksi satanen muodostui?

14 kympestä tuli yksi satanen ja jäi 4 kymppiä.

Saadaan luku 342.

Tehdään sama piirtämällä. Piirrä rengas niiden 10 kympin ympärille. Piirrä nuoli satojen puolelle. Piirrä yksi satanen yläpuolelle. Tuliko sama luku kuin äsken?

Mikä muu lasku sopii tähän kuin yhteenlasku? Kertolasku. Oppilas laskee kertolaskun $2 \cdot 171$ allekkain.

$2 \cdot 1 = 2$, $7 \cdot 2 = 14$. Minne se muistinumero tulee? Oikealle.

$1 \cdot 2 + 1 = 3$. Vastaukseksi tulee 342.

Millä kahdella laskulla saat kaksinkertaisen? Yhteenlaskulla $171 + 171$ ja **kertolaskulla** $2 \cdot 171$ (ei $171 \cdot 2$).

Muistinumerot tulivat eri paikkaan kummallakin kerralla.

Kaksinkertainen saadaan kertomalla kahdella.
Kaksinkertaisen käsitepari on puolet.

Mitä tässä opiskeltiin?

Kaksinkertainen on tärkeä käsite, jonka oppiminen voi aluksi tuntua helpolta, kun käsitellään pieniä lukumääriä. Vaikka tavoitteena olisi käsitellä suuria lukuja, aloitetaan hyvin pienistä lukumääristä ja hyvin konkreettisesti.

Pienillä lukumäärillä kaksinkertaistaminen onnistuu kertolaskun avulla: $2 \cdot 3 = 6$ ja $2 \cdot 6 = 12$.

Kun käsitellään suurempia lukuja, on tavallista, että oppilaat suorittavat kaksinkertaistamisen laskemalla yhteen. Tämä on oikein, mutta alusta lähtien kannattaa korostaa myös kertolaskun mahdollisuutta: onhan sanonta "kaksinkertainen" lähellä merkintää "kaksi kertaa". Tavallista on, että oppilaat sanovat laskusta $171 + 171$, että se on $171 \cdot 2$. Tämäkin on luonnollista: oppilas näkee 171 otettuna kaksi kertaa.

Korostetaan sopimusta, että yhteenlasku $171 + 171$ sanotaan kertolaskuna "kaksi kertaa 171" merkitään $2 \cdot 171$.

Kun myöhemmin käsitellään **muuta monikertoja**, aloitetaan silloinkin työskentely pienistä lukumääristä. Huomataan analogia: 2-kertainen saadaan kertomalla 2:lla, 3-kertainen kertomalla 3:lla jne.

Filmi 9.

5:46



Puolet

Puolet otetaan aluksi vain muutamasta esineestä.

"Miten saat puolet?"

"Ota kuusi korvapuustia. Miten saadaan kuudesta korvapuustista puolet?" Oppilas erottaa 3 korvapuustia ja sanoo 3. "Ota nyt 12 korvapuustia. Kuinka monta on puolet kahdestatoista korvapuustista?" "6."

Millä laskulla se saadaan selville? $12 : 6$. Niin, silloin se on sisältöjako eli kuinka monta kertaa 6 korvapuustia mahtuu kahteentoista.

Kuinka moneen yhtä suureen osaan nämä korvapuustit on jaettu? Äsken niitä oli 12, nyt niitä on tässä 6 ja tässä 6.

Kuinka monelle hengelle nämä riittäisivät? Kahdelle. Silloin sanotaan, että nämä 12 korvapuustia on jaettu – kuinka monelle hengelle? Kuudelle. Jos nämä ovat sinun ja nämä minun, niin kuinka monelle nämä on jaettu. Kahdelle.

Kuinka monta korvapuustia meistä kumpikin saa? Kuusi. Silloin sanotaan, että otetaan puolet korvapuusteista.

(Korvapuustit yhteen kasaan.) Jaa nyt puolet minulle.

Nyt on 12 jaettu kahdelle ja saatiin 6.

Otapa 10 korvapuustia. Jaa ne niin, että sinä saat puolet ja minä saan puolet. Kuinka moneen yhtä suureen osaan nämä 10 on jaettu? Kahteen yhtä suureen osaan, ja silloin saadaan puolet.

Taululla $2 \cdot 171 = 342$

Jos 342 jaettaisiin 2:lla, niin mitä siitä saadaan?

Jaa välineillä rakennettu luku 342, niin katsotaan, mitä siitä tulee.

S	K	Y
	II	.
	II	.

3 sataa jaetaan kahteen osaan, kumpaankin osaan tulee 1 sata ja yli jäänyt 100-levy vaihdetaan 10:ksi 10-sauvaksi, ennestään oli 4 10-sauvaa, nyt niitä on 14, jotka voidaan jakaa kahteen kasaan. Kumpaankin tulee 7 10-sauvaa ja ykkösiä vielä 1 kumpaankin. Saadaan luku 171.

S	K	Y
	II IIII	.
	IIII II	.

Merkitään taululle $342 : 2 = 171$.

Miten saatiin kaksinkertainen? Kertomalla 2:lla, tai niinkuin ensin teit: laskemalla yhteen.

Entä miten saadaan puolet? Kuinka moneen yhtä suureen osaan jaetaan, kun otetaan puolet? Kahteen.

Yhteenveto

kaksinkertainen $2 \cdot 171 = 342$

puolet $342 : 2 = 171$

Puolet saadaan jakamalla kahdella.

Silloin jaetaan kahteen yhtä suureen osaan.

Mitä tässä opiskeltiin?

Oppilaat mieltävät usein "puolet jostakin" vähennyslaskuna. Parillisesta määrästä puolet on helppoa ottaa puolet, ja kun kysytään "miten saat puolet?" voi vastauksena olla "vähentämällä puolet". Parittoman lukumäärän kohdalla tämä vähentäminen ei onnistukaan.

Filmissä oppilas on jakaa 12 korvapuustia kahteen kasaan, jossa kummassakin on 6 korvapuustia. Kun kysytään, mikä jakolasku tästä saadaan, vastaus on $12 : 6$. Oppilas näkee tilanteen sisältöjakona, vaikka ohje oli ositusjako ($12 : 2$).

Siksi asiaa käsitellään fimissä pitkään: "jaa sinulle ja minulle tasan" ja "jaetaan kahteen yhtä suureen osaan".

Jakaminen 10-järjestelmävälineillä sekä saman piirtäminen ja allekkainlaskun kirjoittaminen rinnakkain piirroksen kanssa, vahvistavat käsitteiden ositusjako ja puolet ymmärtämistä.

Käsite **puolet** kannattaakin käsitellä heti kaksinkertaistamisen jälkeen ja samalla korostaa niiden yhteyttä toisiinsa.

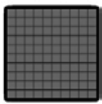
Filmi 10.

18:26



Ten Base -peli

Ten Base -peliin valitaan aluksi vain 100:n, 10:n ja 1:n euron rahoja. Rahat sijoitetaan paikka-alustalle.

S	K	Y,	ko	so
				
				

- * Ten Base -laatikon alapuolella on paikka-alustalle rakennettu **luku 111,11** 10-järjestelmävälineillä ja desimaaliosilla. Näiden välineiden avulla tulee ymmärrystä rahojen välisiin suhteisiin, jotka perustuvat sopimukseen, esim. $100 \text{ €} = 10 \cdot 10 \text{ €}$ ja $1 \text{ €} = 10 \cdot 10 \text{ snt}$.
- * Laatikossa vain 10-järjestelmän mukaiset rahat: 100 €, 10 €, 1 €, 10 snt ja 1 snt.
- * Alussa laitetaan paikka-alustalle 5 kpl 100 €:n seteleitä. Tämä merkitään taululle: 500,00.
- * Ensin **sopimuskortti nro1**: luonnolliset luvut neliö = 100, kolmio = 10 ja ympyrä = 1
- * Kuvakorteissa on **symbolit + ja –** ja niiden perusteella kerrotaan tarina, jossa saadaan tai menetetään rahaa.
- * Tarvittaessa vaihdetaan raha pienemmiksi: $100 \text{ €} = 10 \cdot 10 \text{ €}$ tai suuremmiksi: $10 \cdot 10 \text{ snt} = 1 \text{ €}$.
- * Uudet rahamäärät merkitään taululle allekkain.

- * **Sopimuskortti nro 3**: kymmenesosat mukana neliö = 100, kolmio = 10 ja ympyrä = 0,1
- * Kun sopimus (sääntö) vaihtuu, kassanhoitaja antaa alustoille lisää rahaa 300 €.
- * **Sopimuskortti nro 4**: sadasosat mukana neliö = 1, kolmio = 0,1 ja ympyrä = 0,01
- * Lopuksi verrataan alussa ja lopussa olevia rahoja: Kumpia rahoja on enemmän? Kuinka paljon enemmän? Merkitään lasku: $702,49 - 500,00 = 202,49$ Tarkista tämä laskimella.

Desimaaliluvuista vielä lisää

Paperille/taululle on kirjoitettu laskuja desimaaliluvuilla. Mitä nämä luvut ovat, joissa on pilkku? Desimaaliluvuista. Miten ne poikkeavat niistä luvuista, joissa ei ole pilkkua? Niissä on kymmenesosa ja sadasosa. Voiko niitä olla vielä pienempiä osia? Tuhannesosa. Minkäs kokoisia ne tuhannesosat ovat? Katsotaan paikka-alustaa, johon on rakennettu **luku 111,11** 10-järjestelmävälineillä ja desimaaliosilla. Oppilas näyttää 100:sosa-sauvasta pientä osaa. Rahoilla meillä ei ole tuhannesosaa, mutta näissä desimaaliososissa on. Desimaaliosa-pussista oppilas ottaa yhden tuhannesosan ja sijoittaa sen paikka-alustan oikealle puolelle, jossa voisi lukea **to** eli tuhannesosa.

Ten Base -pelissä opitaan myös desimaalilukuja. Kertomalla tarinoita kuvakorteista voidaan keksiä myös laskuja.

Mitä tässä opiskeltiin?

Ten Base -pelin kehitin huomautessani, että raha tehoaa laskuun kuin laskuun. Tarinoiden kertominen kiehtoo oppilaita. tarinat ovat alussa lyhyitä, mutta ajan myötä oppilaat innostuvat kertomaan pitempiä tarinoita.

Eri sopimuslaatoilla saadaan käsiteltyä eri lukualueita: pelkästään luonnollisia lukuja ja desimaalilukuja, joissa on joko pelkästään kymmenesosia tai myös sadasosia.

Rahat perustuvat sopimukseen, eivätkä ole niin konkreettisia kuin 10-järjestelmävälineet. Siksi kannattaa ennen pelin alkamista näyttää paikka-alustalla, mitä mikin lukuyksikkö tarkoittaa 10-järjestelmävälineillä ja myös desimaaliosilla (vaikkei desimaalilukuja käsiteltäisiinkään).

S	K	Y,	ko	so

Kun näistä konkreettisista välineistä ja niiden suhteista keskustellaan, saadaan saadaan peliin lisää ymmärrystä.

Laskujen tarkistaminen **laskimella** motivoi oppilaita kirjoittamaan laskulausekkeet oikeinpäin, esimerkiksi
120 – 20 eikä 20 – 120, ellei pelissä ole saatu velkaa, eli negatiivisia lukuja.

Ten Base -peliä voi pelata **ryhmässä**, jossa on kassanhoitajan lisäksi 2 + 2 tai 2 + 2 + 2 pelaajaa.
Vuorossa olevat pelaajat saavat kertoa tarinan ja toiset tarkistavat heidän laskunsa laskimella.

Filmi 11.

15:13



Desimaalilukuja rahoilla

Desimaaliluvut ovat osa lukujen maailmaa.
Mitä muita lukuja tunnet ja mitä ne tarkoittavat arjessa?

Taululle on merkitty luvut:

500 702,49 $\frac{3}{4}$ -12

Mitä lukuja oli eilen Ten Base –pelissä? (500 ja 702,49)

Mitä ne luvut tarkoittivat? Rahoja.

Mitä $\frac{3}{4}$ voi tarkoittaa? Pizzan palasia.

Mitä -12 tarkoittaa? Pakkasta 12 astetta tai velkaa 12 €.

Mitä ne luvut ovat, joissa on pilkku? Desimaalilukuja.

Entäs ne luvut, joissa ei ole pilkkua?

Ne ovat luonnollisia lukuja: 0, 1, 2, jne.

Nyt jatkamme desimaalilukujen tarkastelua ja käytämme rahoja.

“Mummo oli pussiin kerännyt kolikoita ja seteleitä lapsenlapsilleen.
Voit ottaa rahat pussista ja arvata
kuinka paljon rahaa mummo oli kerännyt.”

* Sijoita rahat T S K Y, ko so to -alustalle. Kuinka monta seteliä ja kolikkoa on kunkin sarakkeen kohdalla?
Mihin sijoitetaan 1 sentin rahat? Sadasosien kohdalle.
Mikä raha on kymmenesosa eurosta, näytä se. Tuleeko kymmenestä sentin rahasta yksi euro? Ei. Tuli 10 senttiä.

Mikä raha on sellainen, että niitä tarvitaan 10 kpl yhteen euroon?
10 sentin kolikko.

Eli ne kymmenet sentit ovat euron kymmeneosia. Mitä nämä yhden sentin rahat sitten ovat? Kuinka monta näitä tarvitaan euroon? Sata. Sen takia yksi niistä on yksi sadasosa. Rahoissa ei ole tuhannesosia ollenkaan.

* **Kirjoita** taululle: 1 sataa, 9 kymmentä, 23 ykköstä, 14 kymmenesosaa, 25 sadasosaa

* **Sano** ääneen nämä rahamäärät. “1 sataa, 9 kymmentä, 23 ykköstä, 14 kymmenesosaa ja 25 sadasosaa”.

* Voidaanko nyt, kuinka paljon rahaa tässä on? Ei.

* Nyt voit **vaihtaa** rahoja suuremmiksi, sillä vain tilapäisesti saa yhdellä sarakkeella olla yli 9 kpl seteleitä tai kolikoita. Kuinka paljon rahaa on nyt? **Sano** ääneen. “2 satasta, 1 kymppi, 4 ykköstä, 6 kymmensenttistä ja 6 sentin kolikkoa.”

* **Piirrä** nämä rahat taululla olevaan taulukkoon.

S	K	Y,	ko	so
				

* **Sano** rahat ääneen. “214,66 € eli 2 satasta, 1 kymppi, 4 ykköstä, 6 kymmensenttistä ja 6 sentin kolikkoa.”
Kirjoita raha euroina: 214,66 €.

* Sano raha euroina ja sentteinä: 214 euroa ja 66 senttiä.

* **“Pääseekö mummo kehumään,** että hänellä oli noin 300 €?” “Ei, koska rahoja on vähän yli 200 €.”

10-järjestelmän mukaisten rahojen piirtämistä on hyvä harjoitella.

Mitä tässä opiskeltiin?

Oppilaan lukukäsite vahvistuu, kun hän joutuu vertaamaan eri tavoin merkittyjä lukuja ja liittämään ne omaan kokemus-maailmaansa.

Lukujen hajotelmat tulevat konkreettisesti ja motivoitusti käsiteltyä, kun käytetään opetusrahoja lukujen mallina.

Rahojen piirtäminen nostaa mallin abstraktiotasoa hieman ja siitä on hyötyä tilanteissa, joissa rahoja ei ole.

Desimaalilukujen lukeminen paikka-alustalla onnistuu yleensä hyvin, mutta “pilkullisesta” lukemisesta pois-oppiminen vie vielä aikaa. Tarkoitan luvun 3,15 lukemistapaa: “3 pilkku 15”.

Myöhemmin, kun on tarkistettu tämä desimaaliluvun pilkuttoman lukemisen taito, voidaan lukuja lukea pilkullisina, koska se on nopeampaa.

Filmi 12.

6:45



Desimaalilukuja rahoilla, nopat apuna

Käytetään vain 10-järjestelmän mukaisia rahoja. Etukäteen tehdään 1000 €:n seteleitä. Paikka-alustalle heitetään lukuja 1-20 sisältäviä noppia.

Filmillä ei näy, että aluksi tutkittiin lukujen ilmaisemista 10-järjestelmävälillä ja desimaaliosilla sekä rahoilla paikka-alustalla:

T	S	K	Y,	ko	so

- * Laatikossa vain 10-järjestelmän mukaiset rahat: 100 €, 10 €, 1 €, 10 snt, 1 snt ja itse tehtyjä 1000 €:n seteleitä.
- * Erivärisiä ja muotoisia noppia, joissa luvut 1–20.
- * Paikka-alusta eli T S K Y, ko so to -alusta.
- * Valitaan noppa jokaiselle sarakkeelle.
- * Heitetään noppia ja niiden mukaisen lukumäärän mukaisesti otetaan laatikosta rahaa, esimerkiksi 12 kpl sentin kolikoita jne.
- * Rahat vaihdetaan isommiksi, sillä yhdellä sarakkella saa olla vain tilapäisesti yli 9 kpl seteleitä tai kolikoita (esimerkiksi 12 snt → 1 kpl 10 snt ja 2 snt).
- * Heitetään noppia **uudestaan** ja saadut rahat yhdistetään edellisiin.
- * On riemullista, kun rahamäärä tulee niin suureksi, että tarvitaan 1000 €:n seteli.

1216 € 9 snt kirjoitetaan desimaalilukuna 1216,09 €.

Mitä tässä opiskeltiin?

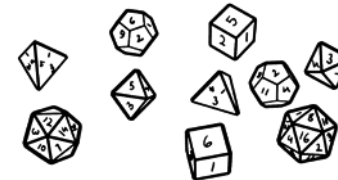
Rahat ja kiehtovat nopat – mikä yhdistelmä motivoivaan työskentelyyn!
Kun noppien lukujen mukaiset rahamäärät laitetaan paikka-alustalle, saadaan **lukujen hajotelmia**, esimerkiksi 5 sataa ja 18 kymppiä, joista saadaan 6 sataa ja 8 kymppiä.

Äänen lukeminen on edelleen tärkeää.

Nopat ja geometria

Tässä filmissä ei tutkittu noppien muotoja, mutta kokemuksesta tiedän, että se on oppilaista kiinnostavaa.

Nopista löytyy **2 ja 3-ulotteista geometriaa**, kun niitä luokitellaan paitsi värien niin myös muotojen mukaisesti. Nopat ovat eri muotoisia kappaleita, joiden tahkoina on seuraavia tasokuvioita: kolmio, neliö ja viisikulmio.



Nopista voi löytyä myös Platonin kappaleet eli viisi säännöllistä monitahokasta:

- tetraedri (4 tasasivuista kolmiota tahkoina)
- heksaedri eli kuutio (6 neliötä tahkoina)
- oktaedri (8 tasasivuista kolmiota tahkoina)
- dodekaedri (12 säännöllistä viisikulmiota tahkoina)
- iksosaedri (20 tasasivuista kolmiota tahkoina).

Filmi 13.

13:18



10-kertainen

Luvun kertominen 10:llä tehdään vaiheittain.

10-kertainen kannattaa tehdä hitaasti vaihe vaiheelta. Koko ajan kannattaa tarkastaa, että oppilas ymmärtää, mitä tekee, piirtää ja merkitsee muistiin lukuina ja laskuina.

“Pienen koulun pihalla oli 23 oppilasta. Isolla koululla on 10-kertainen määrä oppilaita verrattuna pienen koulun pihalla oleviin oppilaisiin. Arvaa kuinka monta isolla koululla oli.”

Yksi oppilas on tällainen 1-kuutio.

Sijoitetaan TSKY-alustalle nuo 23 oppilasta. Vaihdetään 10 ykköstä 10-sauvaksi, myös toisen kerran, saadaan luku 23.

T	S	K	Y
		II	...

Luku merkitään myös lukukorteilla: 23.

“Isen koulun pihalla oli 10-kertainen määrä oppilaita verrattuna pienen koulun oppilasmäärään. Miten saataisiin 10-kertainen määrä? Mitä se tarkoittaa?

Se tarkoittaa, että jokainen oppilas merkitään alapuolelle 10 kertaa, katsotaanpa.”

T	S	K	Y
		II	...
		II	...
		II	...
		II	...
		II	...
		II	...
		II	...
		II	...
		II	...

Vaihdetään 10 ykköstä kymppiksi ja 10 kymppiä sataseksi:

		□.	III
		□.	

Saatiin 2 satasta ja 3 kymppiä, jotka sijoitetaan oikeisiin sarakkeisiin:

T	S	K	Y
	□.	III	
	□.		

Merkitään ison koulun oppilaat muistiin lukukorteilla: 230

Kuinka monta oppilasta oli pikkukoulun pihalla? 23.

Kuinka monta oppilasta oli siis ison koulun pihalla? 230.

Mikä on samaa kummassakin luvussa? 2 ja 3.
Missä se kakkonen on luvussa 230? Satojen paikalla.
Onko kakkonen myös tässä (23) satoja? Ei, kun kymmeniä.
Mitä keltainen kolmonen tarkoittaa? Ykkösiä.
Onko täälläkin (230) ykkösiä kolme? Ei, siellä on kymppoja kolme.

Piirretään alku- ja lopputulos taululle, ei välivaiheita.

Kirjoitetaan samat luvuilla. Merkitään 10-kertaa-nuolet sekä piirroksen sivuun että lukujen välille.

Mikä lasku saadaan?

Oppilas merkitsee **laskimeen** $23 \cdot 10 = 230$.

En korjaa tätä, vaan pyydän häntä vielä merkitsemään toisinpäin:
 $10 \cdot 23 = 230$. Hän huomaa, että saadaan sama luku 230.

HUOM. Filmissä en korosta tarpeeksi, että oikea merkintä olisi $10 \cdot 23$.

Miten saadaan 10-kertainen luku? Kertomalla luku 10:llä.

Lopuksi **ennakoidaan käsitettä kymmenesosa**:

Jos 230 jaetaan 10:llä, niin arvaapas, mitä siitä tulee.

Lasketaan laskimella $230:10 = 23$.

Kun 23 kerrottiin 10:llä, niin sitä tuli 230, ja kun 230 jaetaan 10:llä, niin saadaan 23.

Luvun 10-kertaistaminen myös piirtämällä lisää ymmärrystä.

10-kertaisen käsitepari on kymmenesosa.

Mitä tässä opiskeltiin?

Sääntö "kun 10:llä kerrotaan, laitetaan loppuun nolla" kannattaa opettaa vasta, kun sääntö ymmärretään.

Desimaalilukujen kertomiseen tämä sääntö ei päde.

Filmi 14.

13:02



Kymmenesosa

Kymmenesosan ottaminen aloitetaan muutamasta esineestä.
"Miten saat näistä kymmenesosan?"

"Eilen meillä oli pienellä koululla 23 oppilasta ja isolla koululla 10-kertainen määrä. Miten se saatiin selville? Kerrottiin 10:llä. Muistako kuinka monta heitä oli? 230.

Piirsit sen lukumäärän taulullekin.

Entä jos otettaisiin kymmenesosa jostakin. Kohta saat mennä taululle piirtämään sen, mutta tutustutaan ensin siihen, mitä se kymmenesosa oikein on."

Korvapuustit

Tässä on korvapuustia. Saat ottaa niitä 10. Jos ne jaettaisiin 10:lle hengelle, niin kuinka monta jokainen saisi? Yhden. Minkä sinä ottaisit, jos sinä ottaisit sen kymmenennen osan. (Otaa yhden.) Se olisi yksi niistä kymmenestä. Tämä on nyt kymmenesosa.

Nyt sinulla saa olla 20 korvapuustia. Näistä pitäisi ottaa kymmenesosa. (Otaa kaksi.) Siinä on kymmenesosa. 20 korvapuustista kymmenesosa on 2 korvapuustia. Se saadaan jakamalla 10:llä.

10-järjestelmävälineet

Pöydälle laitetaan 10 kpl 1-kuutiota, jotka ovat "korvapuusteja". Ota näistä kymmenesosa. Vaihda se toisen väriksi, että se näkyy selvästi. Vaihda nämä 10 kuutiota yhdeksi 10-sauvaksi. Näytä sauvasta yksi kymmenesosa. Piirrä se tälle cm²-paperille ja väritä siitä yksi kymmenesosa.



Mitä on 10 jaettuna 10:llä? Tässä on 10 korvapuustia. Jaa ne 10:lle ihmiselle. Kuinka monta jokainen saa? Yhden.

Miten saadaan 20:stä yksi kymmenesosa? Jaa ne 10:lle. Kun 20 korvapuustia jaetaan 10:lle ihmiselle, niin kuinka monta jokainen saa? 2. Silloin se 2 on kymmenesosa 20:stä. Onko siinä nyt 10 yhtä suurta kasaa? On.

10-sauvoja ja 100-levyjä ja cm²-paperi

Näytä tästä sauvasta, mikä on kymmeneosa. (Näyttää yhtä.) Piirrä se paperille ja väritä siitä kymmenesosa. Mitäs jos niitä olis 20. Nyt ne korvapuustit ovat tämän näköisiä. Piirrä ja väritä taas kymmenesosa.

Miten saadaan 100:sta yksi kymmenesosa? Näytä 100-levystä ja piirrä paperille. Kirjoita se laskuna $100 : 10 = 10$. Tässä on 20, joka jaettiin tasan 10:lle. Kirjoita laskuna $20 : 10 = 2$.

Luvusta 230 yksi kymmenesosa

Miten saadaan näillä keinoilla selville tämä ongelma: "Ison koulun pihalla on 230 oppilasta ja pienen koulun pihalla on kymmenesosa näiden oppilaiden lukumäärästä. Kuinka monta oppilasta on siellä?"

Luku 230 sijoitetaan TSKY-alustalle 10-järjestelmävälineillä.

Pohditaan, miten saadaan kymmenesosa luvusta 230. 10:stä kymmenesosa on 1, jne. 100:sta kymmenesosa on 10, jne. Lopuksi sijoitetaan välineet oikeille paikoilleen eli oikean lukuyksikön sarakkeeseen.

T	S	K	Y
	□. □.	III	
	II	...	
		II	...

230:stä kymmenesosa on siis 23.

Piirretään taululle: Piirretään tämä sama taululle sekä nuolet "jaetaan 10:llä". Luvuilla merkitty 230. Merkitään sen alapuolelle kymmenesosa eli 23.

Tarkastellaan taulukkoa taululla:

Kuinka moninkertainen määrä oli isolla koululla (230) verrattuna pienen koulun lukumäärään (23)? 10-kertainen.

Entä toisinpäin: Kuinka mones osa ison koulun oppilasmäärästä (230) oli pienen koulun oppilasmäärä (23)? Kymmenesosa.

Kymmenesosa jostakin saadaan jakamalla 10:llä.

Piirtäminen vahvistaa käsitteen ymmärtämistä.
Kymmesosaa ja 10-kertaista tutkitaan “edestakaisin”.

Mitä tässä opiskeltiin?

Käsitteitä 10-kertainen ja kymmenesosa kannattaa käsitellä peräkkäin ja rinnakkain 10-järjestelmävälineillä ja paikka-alustalla sekä myös piirtäen.
Oppilaiden on tärkeää oppia, että nämä käsitteet muodostavat “parin”, kuten käsitteet kaksinkertainen ja puolet, kerto- ja jakolasku, yhteen- ja vähennyslasku sekä myöhemmin neliöjuuri ja toinen potenssi.

Filmi 15.

8:51



Kertolaskua 10-järjestelmävälineillä

Laskun $12 \cdot 13$ tekeminen 10-järjestelmä-välineillä on kiehtovaa.
Kertolasku piirretään myös cm^2 -paperille.

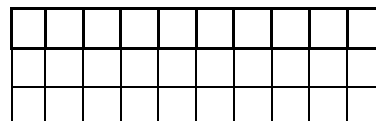
Tarvitaan 100-levy, 10-sauvoja ja 1-kuutioita sekä cm^2 -paperia ja värikyniä.

Kokeillaanpa erilaista tapaa tehdä kertolaskuja.

Tee näillä kuutioilla **lasku $2 \cdot 3$** . Tee kuutioista suorakulmion muotoinen. Piirrä se tälle paperille ja väritä.
Mikä kertolasku siitä saadaan? Kirjoita viereen $2 \cdot 3 = 6$.



Tee samalla tavalla **lasku $3 \cdot 10$** sauvoilla, piirrä kuva ja väritä se.



Minkä näköinen olisi **10 kertaa 10**?

Ota se näistä välineistä. Piirrä 100-levyn kuva ja kirjoita lasku yläpuolelle. Mikä lasku siitä saadaan? 10 kertaa 10.
Kirjoita se: $10 \cdot 10 = 100$.

Kokeillaan **laskua $12 \cdot 13$** .

Osaisitko tehdä laskun 12 kertaa 13? En.

Piirrä vaakasuoraan jana, jonka pituus on 12 cm ja pystysuoraan jana, jonka pituus on 13 cm.

Yhdistä janat suorakulmioksi.

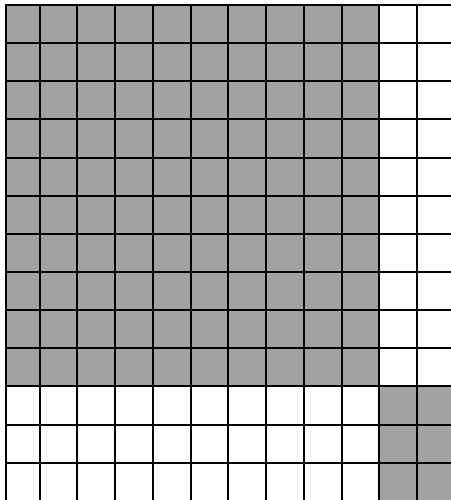
Kun $10 \cdot 10$ on tässä vieressä, niin mikä lasku tästä saadaan?
 $12 \cdot 13$.

Peitä yksi osa tästä suorakulmiosta 100-levyllä ja reunoihin lisäät 10-sauvoja. Tyhjäksi jääneen tilan peität 1-kuutioilla.
Mikä luku tuli? 156.

Piirrä 100-levyn reunat, samoin 10-sauvojen reunat.

Väritä 100-levyn paikka sekä 10-sauvojen ja 1-kuutioiden paikat.

Nyt näet myös piirustuksesta laskun $12 \cdot 13 = 156$.



“Mitä muita kertolaskuja haluat tehdä tällä tavalla?”

Mitä tässä opiskeltiin?

- Kertolaskujen tekeminen 10-järjestelmävälineillä ja piirtäminen cm²-paperille kannattaa, koska
- * se toimii vastapainona ilman ymmärrystä suoritettavalle allekkainlaskulle
 - * tekeminen on hauskaa ja haastavaa
 - * työskentely mahdollistaa eriyttämisen.

Miten lasku $12 \cdot 13$ kirjoitetaan algoritmina ja yhdistetään äsken tehtyyn?

S	K	Y	
	1	3	
·	1	2	
	6	=	$2 \cdot 3$ 6 kpl 1-kuutioita
	2	0	= $2 \cdot 10$ 2 kpl 10-sauvoja
	3	0	= $10 \cdot 3$ = $3 \cdot 10$ eli 3 kpl 10-sauvoja
+	1	0	0 = $10 \cdot 10$ 1 kpl 100-levyjä
	1	5	6

Y
l
l
ä
o

levaa algoritmia ei käyty läpi filmissä olevien oppilaiden kanssa.

Sivulla 96 lisää tähän aiheeseen liittyvää.